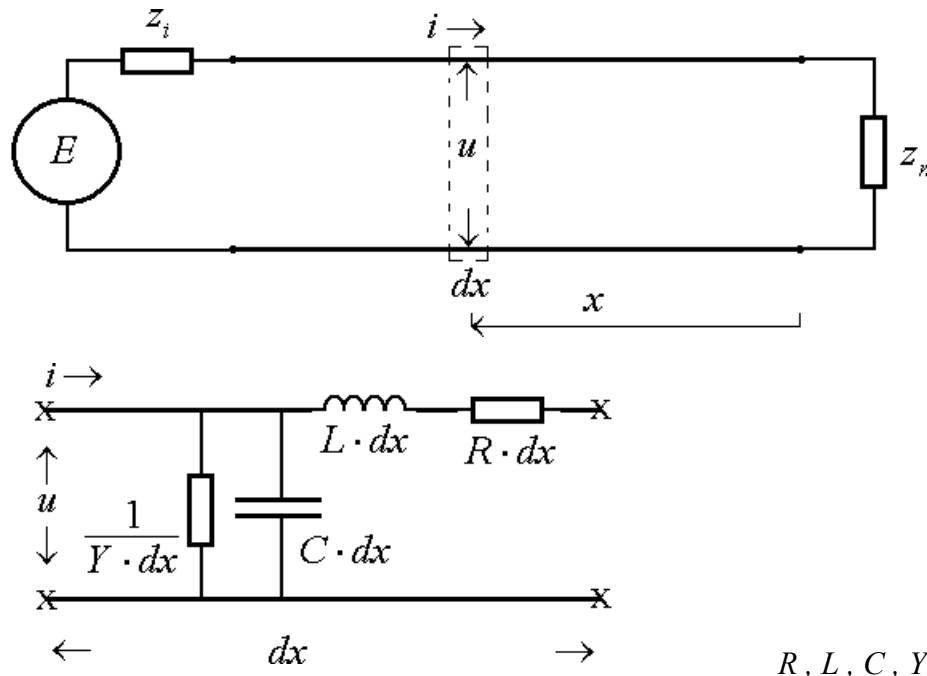


Длинная линия. Телеграфные уравнения.

Ранее предполагалось наличие элементов только с сосредоточенными R, L, C . Но : R, L, C могут быть "размазаны" по электрической цепи - т.е. могут присутствовать элементы с **распределенными параметрами** - в частности, **длинные линии** :



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\left(L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri\right) \cdot (-\partial x) \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\left(C \frac{\partial u}{\partial t} + Yu\right) \cdot (-\partial x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \\ \frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Yu \end{cases}$$

Решение - в виде комплексных экспонент - гармонических волн с амплитудами A_1 (**прямая волна**) и A_2 (**обратная волна**) :

$$\begin{cases} u(x, t) = A_1 e^{\gamma x + j\omega t} + A_2 e^{-\gamma x + j\omega t} \\ i(x, t) = \frac{1}{z_B} (A_1 e^{\gamma x + j\omega t} - A_2 e^{-\gamma x + j\omega t}) \end{cases}, \text{ где}$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(Y + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad - \text{ постоянная распространения в линии}$$

$$z_B = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{Y + j\omega C}} \quad - \text{ волновое сопротивление}$$

α - **постоянная затухания** в линии - т.е. (длина линии) $^{-1}$, на которой амплитуда волны падает в e раз

β - **фазовая постоянная** - т.е. (длина линии) $^{-1}$, на которой фаза меняется на 1rad.

Переходя от $u(t)$ и $i(t)$ к $\dot{U}$ и $\dot{I}$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \dot{A}_2 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \\ \dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{z_B} e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \frac{\dot{A}_2}{z_B} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \end{cases}$$

- где $\dot{A}_1$ и $\dot{A}_2$ - комплексные амплитуды прямой и обратной волн

Условия прохождения сигналов по линии без искажений :

1) **одинаковая задержка** для всех гармонических волн - т.е. независимость фазовой скорости от частоты :

$$-j\beta \cdot V_\phi t + j\omega t = 0 \quad (\text{т.е. при } x = -V_\phi t) \Rightarrow V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \text{const}(\omega) \quad - \text{отсутствие}$$

дисперсии

2) **одинаковое затухание** всех частот (сигнал как целое уменьшается в $e^{-\alpha x}$ раз) - т.е. $\alpha = \text{const}(\omega)$

Простейший случай - **линия без потерь** - $R = 0$ и $Y = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{-\omega^2 LC} = j\omega\sqrt{LC} \\ z_B = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \quad - \text{когда } \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{LC},$$

$$z_B = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad - \text{чисто вещественное}$$

Т.о. фазовые скорости прямой и обратной волн $V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ не зависят от частоты, а амплитуды не зависят от x .

Отражение волны от нагрузки. Соотношение амплитуд прямой и обратной волн.

$$\text{На конце линии } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \dot{U}_n \\ \dot{I} = \frac{1}{\rho}(\dot{A}_1 - \dot{A}_2) = \dot{I}_n \\ \frac{\dot{U}_n}{\dot{I}_n} = z_n \end{cases}$$

$$z_n = \rho \frac{\dot{A}_1 + \dot{A}_2}{\dot{A}_1 - \dot{A}_2} = \rho \frac{1 + \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}}{1 - \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}} = \rho \frac{1 + p_U}{1 - p_U} \Rightarrow$$

$$p_U = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{z_n - \rho}{z_n + \rho} \quad - \text{коэффициент отражения волны напряжения}$$

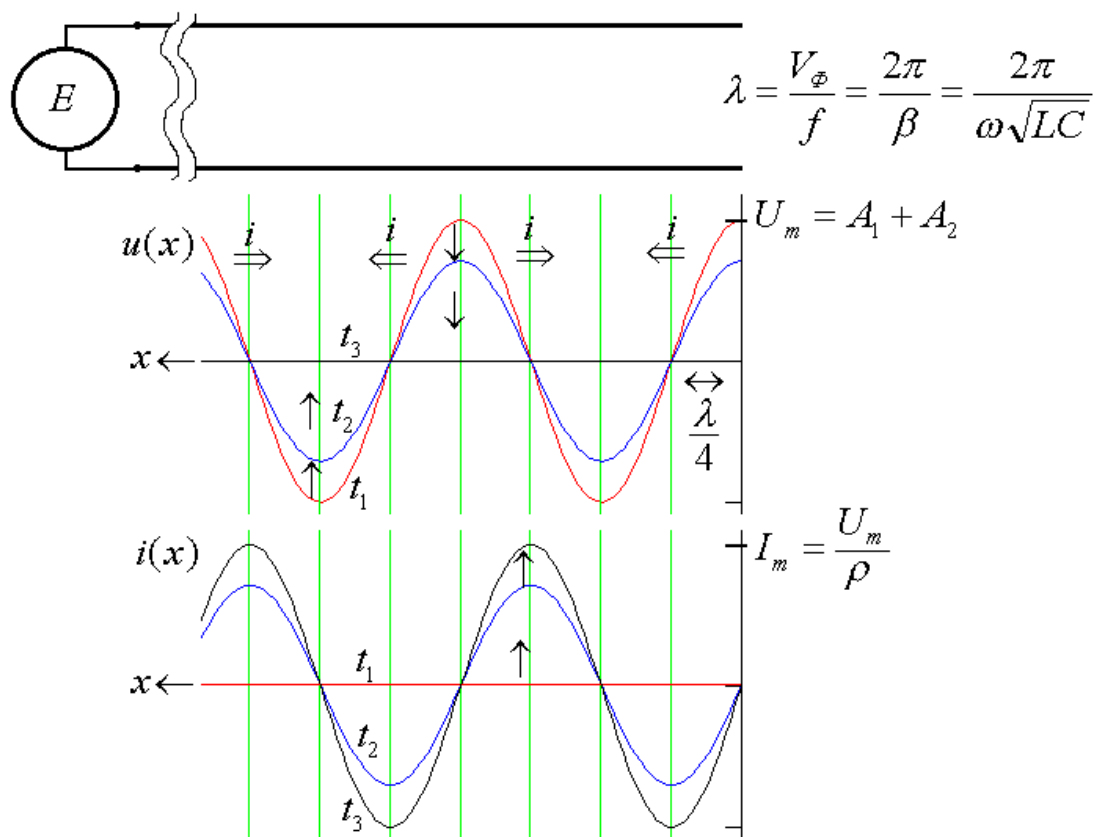
$$p_I = -\frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1} = \frac{\rho - z_n}{\rho + z_n} \quad - \text{коэффициент отражения волны тока}$$

Три важных крайних случая :

1) $z_n = \rho \Rightarrow p_U = 0$, $p_I = 0$ и $\dot{A}_2 = 0$ - есть только прямая волна, полностью поглощаемая нагрузкой - нет отражения - т.н. согласованная нагрузка

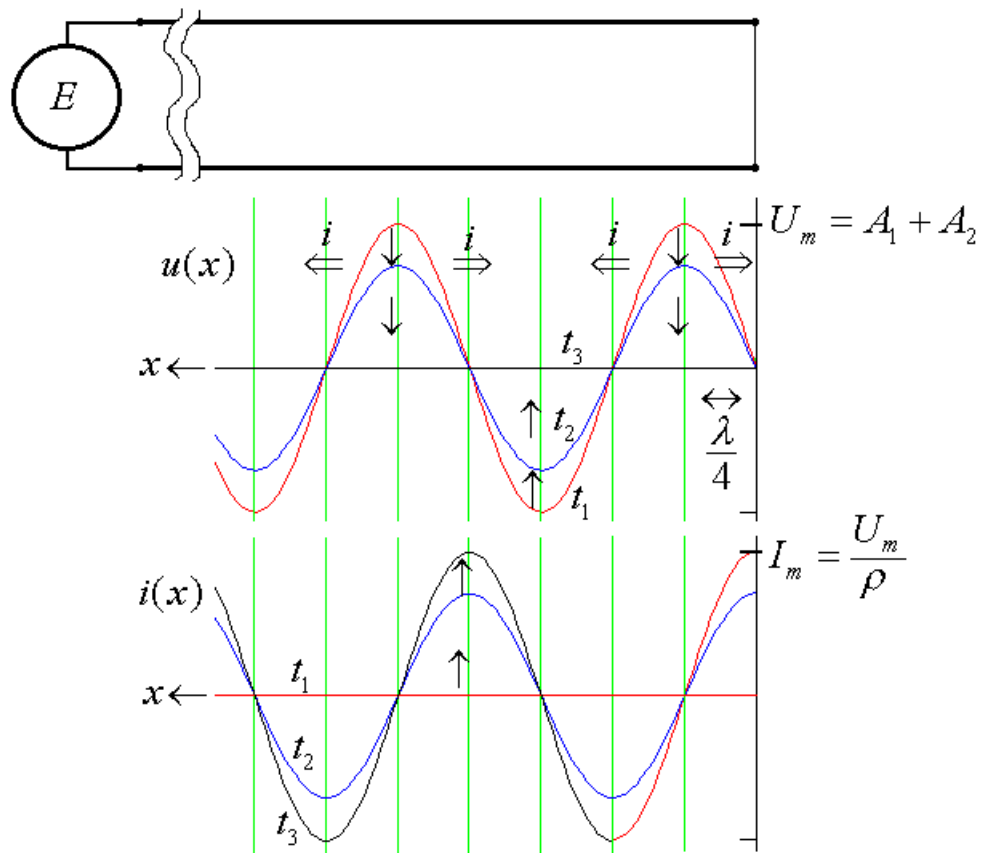
2) $z_n = \infty \Rightarrow p_U = 1$, $p_I = -1$ и $\dot{A}_2 = \dot{A}_1$ - при разомкнутом конце линии (режим х.х.) амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей; фаза напряжения при отражении сохраняется, а тока обращается на 180° (инвертируется) $\Rightarrow$ напряжение на конце линии имеет удвоенную амплитуду, а ток равен 0.

В самой линии - т.н. стоячая волна :



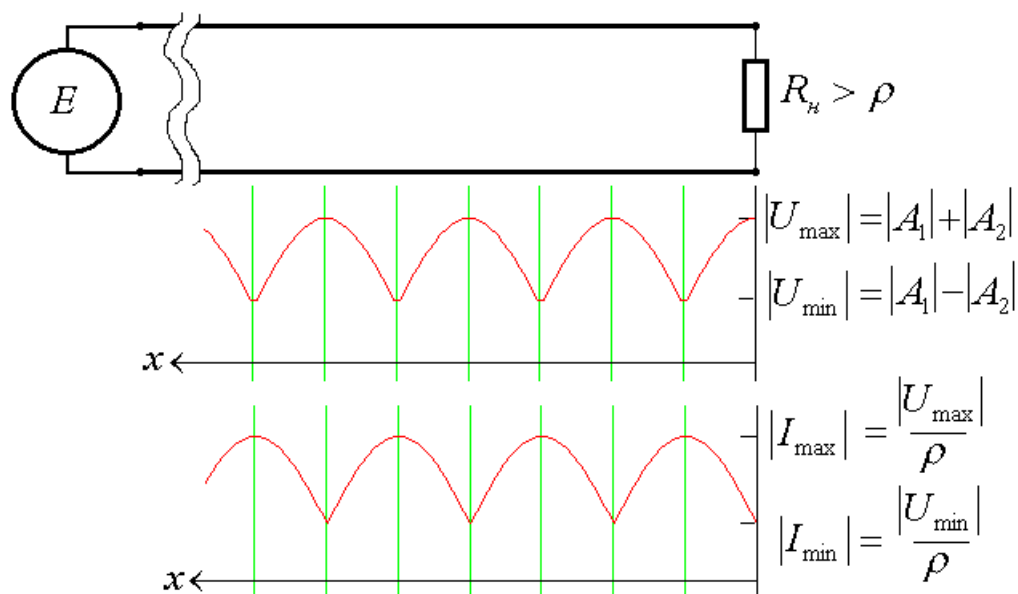
- ток и напряжение в любой точке (по x) сдвинуты на 90° - нет передачи энергии (есть зоны с $\dot{I} = 0$ или с $\dot{U} = 0$)

3) $z_n = 0 \Rightarrow p_U = -1$, $p_I = 1$ и $\dot{A}_2 = -\dot{A}_1$ - напряжение на конце линии 0, а ток - удвоенный (режим к.з.) :



Более общие случаи :

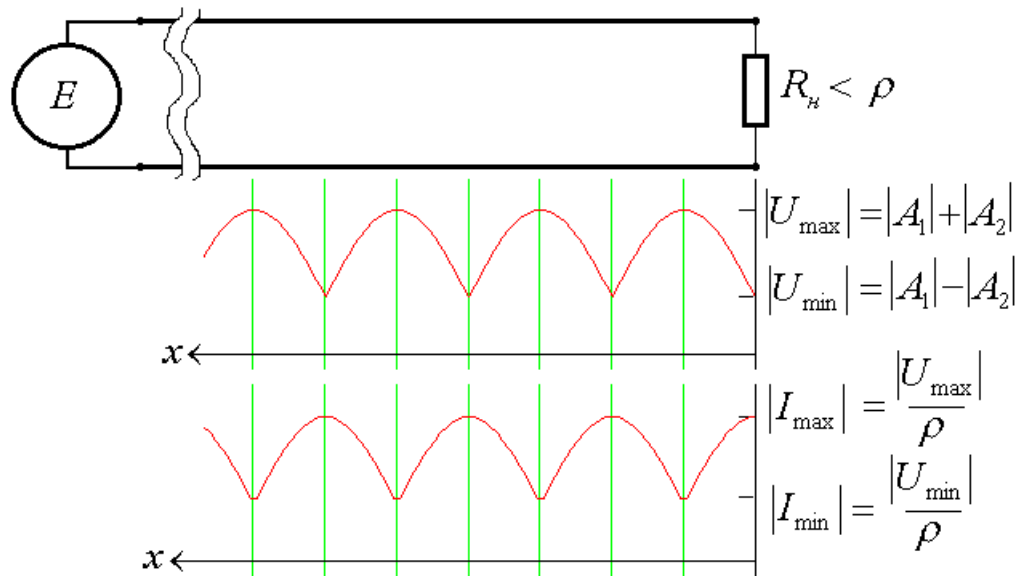
4) $z_n = R_n > \rho \Rightarrow p_U > 0$, $p_I < 0$



Вводят $K_{БВ} = k = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$, $0 \leq k \leq 1$; $K_{СВ} = \frac{1}{K_{БВ}} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$, $1 \leq K_{СВ} < \infty$

для $R_n > \rho$ $K_{БВ} = \frac{\rho}{R_n}$

5) $z_n = R_n < \rho \Rightarrow p_U < 0$, $p_I > 0$



для $R_n < \rho$ $K_{БВ} = \frac{R_n}{\rho}$

6) В общем виде для произвольной нагрузки z_n имеем комплексный

коэффициент отражения $n_2 = \frac{z_n - \rho}{z_n + \rho}$ и $\dot{A}_2 = n_2 \dot{A}_1$

$$K_{БВ} = \frac{1 - |n_2|}{1 + |n_2|}$$

Входное сопротивление линии для синусоидального (стационарного) сигнала :

$$z_{BX} = \frac{\dot{U}_{BX}}{\dot{I}_{BX}} = \frac{\dot{U}_l}{\dot{I}_l} \text{ - на расстоянии } x=l \text{ от конца для линии длиной } l \Rightarrow$$

$$z_{BX} = z_B \frac{\dot{A}_1 e^{\gamma l} + \dot{A}_2 e^{-\gamma l}}{\dot{A}_1 e^{\gamma l} - \dot{A}_2 e^{-\gamma l}}$$

Три основных случая :

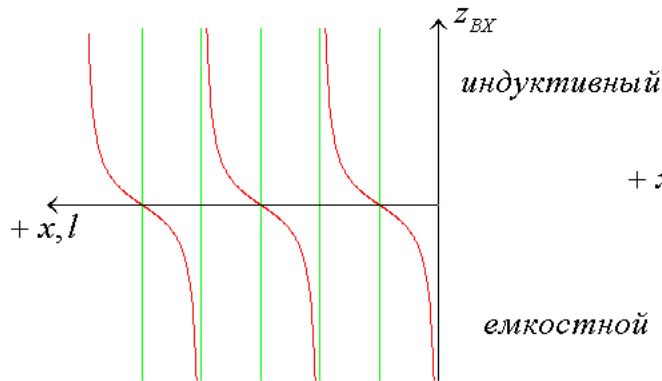
1) $\boxed{z_H = z_B = \rho} \Rightarrow \dot{A}_2 = 0$ и $z_{BX} = z_B = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$2) \ z_H = \infty \Rightarrow \dot{A}_2 = \dot{A}_1 \text{ и } z_{BX} = -j\rho \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

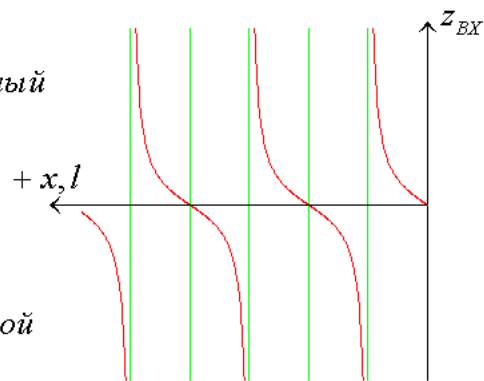
$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}};$$

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \omega l \sqrt{LC}$$

$$3) \ z_H = 0 \Rightarrow \dot{A}_2 = -\dot{A}_1 \text{ и } z_{BX} = j\rho \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$$

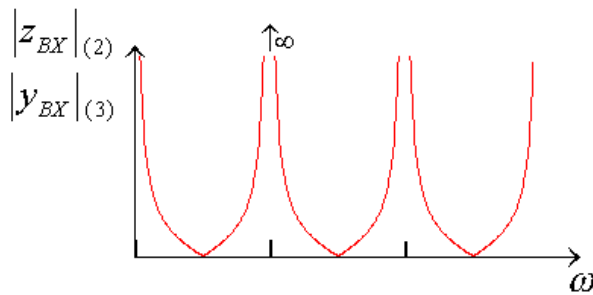


$$2) \ z_H = \infty$$



$$3) \ z_H = 0$$

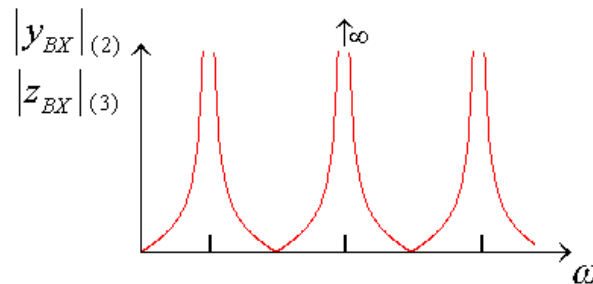
Линия фиксированной длины - аналог контура без потерь, но с множеством резонансов :



$$\frac{m\lambda}{2} = l \quad \lambda = \frac{2l}{m}$$

$$\omega_p = \frac{2\pi}{\lambda\sqrt{LC}} = \frac{\pi m}{l\sqrt{LC}}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$



$$\frac{m\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} = l \quad \lambda = \frac{2l}{m - \frac{1}{2}}$$

$$\omega_p = \frac{\pi \left(m - \frac{1}{2}\right)}{l\sqrt{LC}}$$

$\Rightarrow$ длинная линия, аналогично колебательному контуру, может быть трансформатором ток-напряжение или напряжение-ток.

При подключении чисто реактивной нагрузки происходит смещение нулей и максимумов z_{BX} и y_{BX} ; при чисто активной (но $\neq \rho$) появляется "конечная добротность" - в линии есть и бегущая, и стоячая волны, $|z_{BX}|$ и $|y_{BX}|$ нигде не обращаются в 0 или в ∞ , а сами z_{BX} и y_{BX} становятся комплексными.

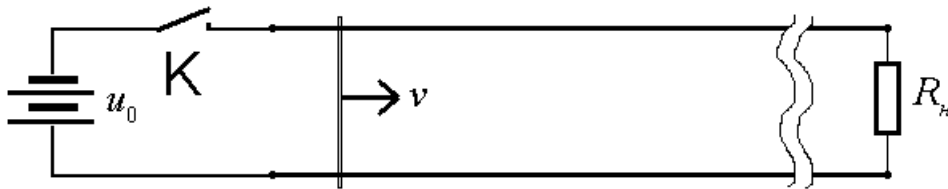
В частности

$z_{BX} = R_n$ при $l = \frac{m}{2}\lambda$ - не зависимо от ρ - т.н. **полуволновая передающая линия**

$z_{BX} = \frac{\rho^2}{R_n}$ при $l = \frac{m-1}{2}\lambda$ - трансформатор R_n - т.н. **четвертьволновой трансформатор**

Применение длинных линий : частотно-избирательные цепи, согласующие трансформаторы, четвертьволновые изоляторы, линии задержки, передача сигналов и ВЧ-энергии.

Переходные процессы в линии.



Пусть в $t = 0$ включаем источник - мгновенный скачек напряжения и в линии возникает волна напряжения и тока; скорость волны v .

За время Δt в линию втекает заряд $\Delta q = C u_0 \cdot v \Delta t$

откуда $i_0 = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C u_0 v$

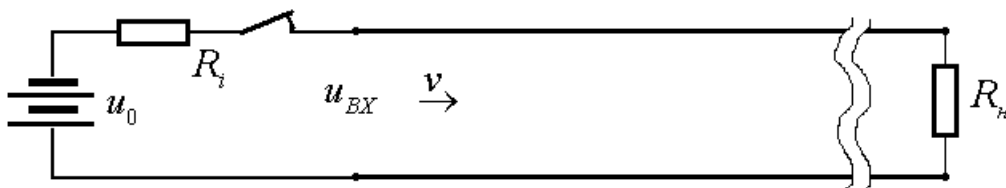
Мощность, отдаваемая источником $p = i_0 u_0 = u_0^2 C v$

Эта мощность равна энергии, запасаемой за единицу времени в C и L линии за счет продвижения волны :

$$\left(\frac{C u_0^2}{2} + \frac{L i_0^2}{2} \right) v = p = u_0^2 C v \Rightarrow \frac{C u_0^2}{2} = \frac{L i_0^2}{2} \Rightarrow i_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{u_0}{\rho}$$

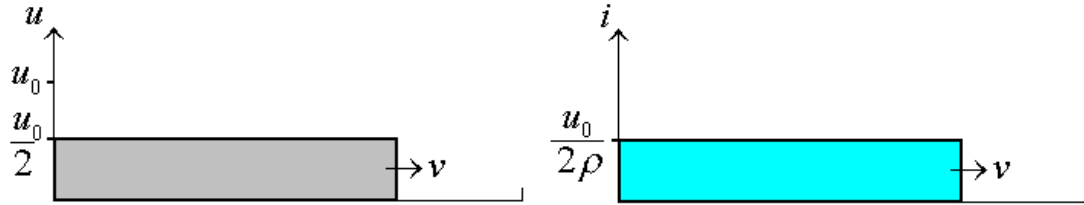
т.е. в начале процесса входное сопротивление линии равно ее волновому сопротивлению (и не зависит от R_n)

Если $R_i \neq 0$



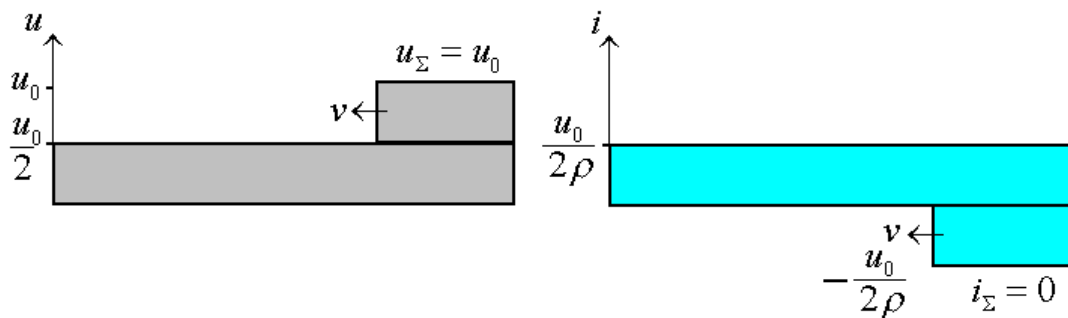
то в начальный момент $u_{BX} = u_0 \frac{\rho}{R_i + \rho}$ - делитель

Если источник согласован с линией и $R_i = \rho$ - то $u_{BX} = \frac{1}{2}u_0$ - возникает волна с амплитудой $\frac{1}{2}u_0$:



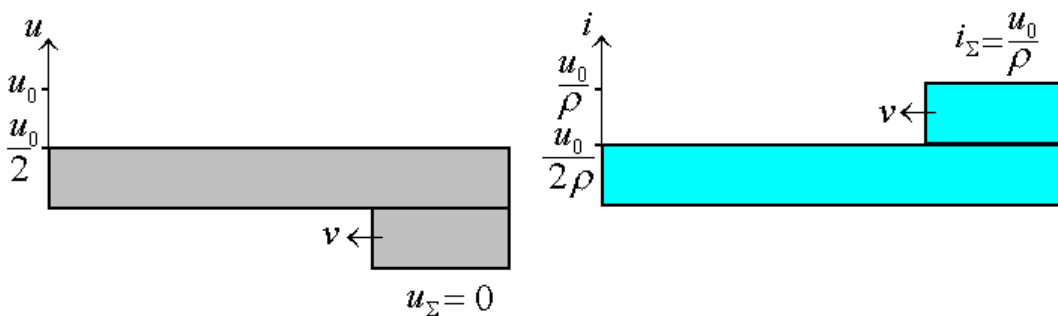
Далее все зависит от нагрузки линии :

- 1) $R_n = \rho$ - нет отражения, и на линии устанавливается $u = \frac{1}{2}u_0$ - то же, что и на постоянном токе
- 2) $R_n = \infty$ - волна напряжения отражается без инверсии, тока - с инверсией - т.е. после отражения линия заряжается до $u = u_0$, а ток в ней исчезает :



По достижению отраженной волной источника она поглотится сопротивлением $R_i = \rho$, ток исчезнет во всей линии, а напряжение везде будет u_0

- 3) $R_n = 0$ - к.з. линии - волна напряжения отражается с инверсией, тока - без :

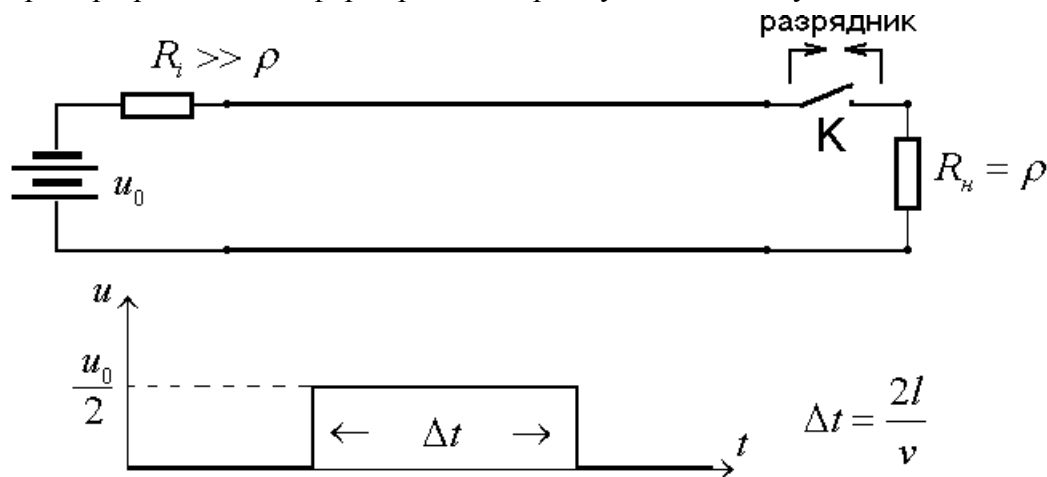


По достижению отраженной волной источника она поглотится $R_i = \rho$, ток во всей линии станет $i = \frac{u_0}{R_i} = \frac{u_0}{\rho}$, а напряжение везде будет 0 .

4) Если нагрузка R_n конечная и $\neq \rho$ - то после поглощения отраженной волны в линии установится ток $i = \frac{u_0}{R_n + R_i} = \frac{u_0}{R_n + \rho}$ и напряжение $u = \frac{u_0 R_n}{R_n + R_i} = \frac{u_0 R_n}{R_n + \rho}$

Если нагрузка и источник не согласованы с линией, то возникают многократные затухающие отражения - и только постепенно (в пределе) устанавливаются $i = \frac{u_0}{R_n + R_i}$ и $u = \frac{u_0 R_n}{R_n + R_i} \Rightarrow$ при передаче сигналов для предотвращения искажения их формы из-за отражений применяют **согласованные линии** - хотя бы с одной стороны (в идеале - с двух сторон)

Пример применения - формирование прямоугольных импульсов :



Конструкции линий :

1) Двухпроводная

обычно $\rho \approx 100 \div 300 \Omega$ $v \approx c$

The diagram shows a cross-section of a two-wire transmission line. Two parallel cylindrical conductors, labeled "проводники", are separated by a yellow dielectric material labeled "диэлектрик (изолятор)".

Варианты - "витая пара", симметричная полосковая линия, т.д.

2) Коаксиальная

$\rho \approx 50 \div 150 \Omega$

The diagram shows a cross-section of a coaxial cable. It consists of a central conductor labeled "жила" (strand) surrounded by a yellow dielectric material labeled "диэлектрик (изолятор)", which is in turn surrounded by an outer conductor labeled "оплетка (проводники)" (shielding (conductors)).

$v \approx (0.5 \div 0.7)c \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ - для полиэтилена $\epsilon \approx 2.5$